▸ Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων (Με 2 Απλά διανύσματα)

1) Εστω τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 2, \quad |\vec{\beta}| = 4 \quad \text{και} \quad (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$$

Να βρείτε:

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, ii) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}$, iii) $3\vec{\alpha} \cdot (-4\vec{\beta})$

και iv) $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$

<u>ΛΥΣΗ</u>

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 2 \cdot 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$

ii) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\alpha}| \cdot \cancel{\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\alpha}})}^{\,1} = |\vec{\alpha}|^2 = 4$

iii) $3\vec{\alpha}(-4\vec{\beta}) = -12 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -12 \cdot 4 = -48$

iv) $\vec{\alpha}(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4 - 2 \cdot 4 = -4$

2) Εστω τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα, ώστε
$|\vec{\alpha}| = 3, \ |\vec{\beta}| = 4$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

Να βρείτε:

i) $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και ii) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$|\vec{\alpha}| = 3, \ |\vec{\beta}| = 4$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

Άρα,

i) $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = |\vec{\alpha}|^2 + \cancel{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}^{\,0} = 9$

ii) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = 9 - 16 = -7$

3) Έστω τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα, ώστε $|\vec{\alpha}|=5$, $|\vec{\beta}|=2$ και $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$

Να βρείτε:

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και ii) $(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|=-5\cdot 2=-10$

ii) $(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=2|\vec{\alpha}|^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{\alpha}\vec{\beta}-|\vec{\beta}|^2=$

$=2|\vec{\alpha}|^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-|\vec{\beta}|^2=50+10-4=56$

4) Έστω τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ όπου

$\vec{\alpha}=(2,-5)$ και $\vec{\beta}=(7,2)$

Να βρείτε:

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})(3\vec{\alpha}-2\vec{\beta})$

ii) Το $k\in\mathbb{R}$, όπου τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}+k\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους

ΛΥΣΗ

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(2,-5)(7,2)=14-10=4$

$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})(3\vec{\alpha}-2\vec{\beta})=3|\vec{\alpha}|^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-2|\vec{\beta}|^2=$

$=3(4+25)+4-2(49+4)=$

$=3\cdot 29+4-2\cdot 53=$

$=87+4-106=91-106=-15.$

ii) $\vec{\alpha}\perp\vec{\alpha}+k\vec{\beta}\Rightarrow\vec{\alpha}(\vec{\alpha}+k\vec{\beta})=0\Rightarrow|\vec{\alpha}|^2+k\vec{\alpha}\vec{\beta}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 4+25+k\cdot 4=0\Rightarrow k=-\frac{29}{4}$

5) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων

$\vec{\alpha} = (-2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-1, 3)$

ΛΥΣΗ

Από τον εξής τύπο, έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{(-2, 1) \cdot (-1, 3)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} =$$

$$= \frac{2 + 3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{\cancel{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα, αν $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \theta$ τότε:

$$\left.\begin{cases} \theta = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ \theta = 2k\pi + \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

Και λόγω ότι $0 \leq \theta \leq \pi$

Άρα, $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad.

6) Να βρείτε τα διανύσματα που είναι κάθετα στο $\vec{u} = (4, 3)$ και έχουν μέτρο διπλάσιο απ' το $|\vec{u}|$.

ΛΥΣΗ

Έστω τα διανύσματα $\vec{v}$ όπου ισχύει:

- $\vec{v} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (x, y) \cdot (4, 3) = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 4x + 3y = 0$ (1).
- Καθώς, $|\vec{v}| = 2|\vec{u}| \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{4^2 + 3^2} \Rightarrow$
  $\Rightarrow x^2 + y^2 = 100$ (2)

Από (1), (2) έχουμε ότι $(x, y) = (6, -8)$ ή $(x, y) = (-6, 8)$

Άρα, $\vec{v} = (6, -8)$ ή $\vec{v} = (-6, 8)$

7) Έστω τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ και μη μηδενικά, ώστε $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ rad

Να βρείτε:

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, ii) Το $\lambda \in \mathbb{R}$ όπου τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους

ΛΥΣΗ

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1 \cdot 4 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

ii) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (\vec{\alpha} - \vec{\beta})(2\vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2|\vec{\alpha}|^2 + \lambda \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - \lambda |\vec{\beta}|^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot 1 + \lambda(-2) - 2(-2) - \lambda \cdot 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 - 2\lambda + 4 - 16\lambda = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -18\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

8) Δίνεται το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, ώστε:

$|\vec{AB}| = 1$, $|\vec{A\Gamma}| = 2$ και $(\widehat{\vec{AB}, \vec{A\Gamma}}) = \frac{\pi}{3}$

Να βρείτε:

i) $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}$, ii) $3\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma A}$, iii) $\vec{AB}^2$

και iv) $\vec{AB} \cdot \vec{B\Gamma}$

ΛΥΣΗ

i) $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{A\Gamma}| \cdot \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{AB}, \vec{A\Gamma}}) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

ii) $3\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma A} = -3\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = -3 \cdot 1 = -3$

iii) $\vec{AB}^2 = |\vec{AB}|^2 = 1$

iv) $\vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} - \vec{AB} \overset{\text{Άρα}}{\Rightarrow} \vec{AB} \cdot \vec{B\Gamma} = \vec{AB}(\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) =$

$= \vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} - |\vec{AB}|^2 = 1 - 1 = 0$

9) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in V$ όπου
$|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 8$, $|\vec{\gamma}| = 5$ και $3\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2\vec{\gamma}$

ΝΔΟ

i) $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 100$

ii) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

iii) Αν για το διάνυσμα $\vec{\delta}$, ισχύουν οι σχέσεις:
$(\vec{\delta} + \vec{\beta}) \parallel \vec{\alpha}$ και $\vec{\delta} \perp (4\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

τότε

$$\vec{\delta} = 4\vec{\alpha} - \vec{\beta}.$$

ΛΥΣΗ

i) $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = (2\vec{\gamma})^2 = 4|\vec{\gamma}|^2 = 4 \cdot 25 = 100$

ii) Αρκεί νδο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$.

Ξέρουμε, $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 100 \Rightarrow 9|\vec{\alpha}|^2 - 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 100 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9 \cdot 4 - 12\vec{\alpha}\vec{\beta} + 64 = 100 \Rightarrow \cancel{100} - 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \cancel{100} \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

iii) $(\vec{\delta} + \vec{\beta}) \parallel \vec{\alpha}$, με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε $\exists \lambda \in \mathbb{R}$:
• $\vec{\delta} + \vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\delta} = \lambda\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ (1)

Αλλά, $\vec{\delta} \perp (4\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \Rightarrow \vec{\delta}(4\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} (\lambda\vec{\alpha} - \vec{\beta})(4\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 0$
$\Rightarrow 4\lambda|\vec{\alpha}|^2 + \cancel{\lambda\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}^{0} - \cancel{4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}^{0} - |\vec{\beta}|^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4\lambda \cdot 4 - 64 = 0 \Rightarrow 16\lambda = 64 \Rightarrow \lambda = 4$

Άρα, (1) είναι:

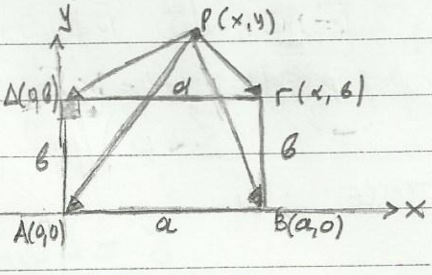
$$\vec{\delta} = 4\vec{\alpha} - \vec{\beta}$$

10) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, ώστε $(AB)=\alpha$ και $(B\Gamma)=\beta$.

ΝΔΟ $\forall P$ σημείο του επιπέδου, ισχύουν:

i) $\vec{PA}\cdot\vec{P\Gamma}=\vec{PB}\cdot\vec{P\Delta}$

ii) $\vec{PA}\cdot\vec{BA}+\vec{P\Gamma}\cdot\vec{\Delta\Gamma}=\alpha^2$.



ΛΥΣΗ

i) Στο σύστημα αναφοράς →

ισχύουν $\Delta(0,\beta)$, $\Gamma(\alpha,\beta)$

$B(\alpha,0)$, $A(0,0)$

και $P(x,y)$

Συνεπώς,

$$\vec{PA}=(0-x,\,0-y)=(-x,-y)$$
$$\vec{P\Gamma}=(\alpha-x,\,\beta-y)$$
$$\vec{PB}=(\alpha-x,\,-y)$$
$$\vec{P\Delta}=(-x,\,\beta-y)$$

Άρα,

$$\vec{PA}\cdot\vec{P\Gamma}=\vec{PB}\cdot\vec{P\Delta}\iff$$
$$(-x,-y)\cdot(\alpha-x,\beta-y)=(\alpha-x,-y)\cdot(-x,\beta-y)\iff$$
$$x^2-\alpha x+y^2-\beta y=x^2-\alpha x+y^2-\beta y$$ ισχύει.

ii) $\vec{BA}=(-\alpha,0)$ και $\vec{\Delta\Gamma}=(\alpha,0)$

$$\vec{PA}\cdot\vec{BA}+\vec{P\Gamma}\cdot\vec{\Delta\Gamma}=(-x,-y)(-\alpha,0)+(\alpha-x,\beta-y)(\alpha,0)=$$
$$=\cancel{\alpha x}-\cancel{y0}+\alpha^2-\cancel{\alpha x}+\cancel{0\cdot(\beta-y)}=\alpha^2$$

11) i. ΝΔΟ για όλα τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in V$ ισχύει η σχέση:

$$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|.$$

ii. Αν για τα $x,y\in\mathbb{R}$, ισχύει η σχέση

$$x^2+y^2=9$$

ΝΔΟ

$$|3x+4y|\le 15$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

<u>ΛΥΣΗ</u>

i. • Αν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in V$ είναι μη μηδενικά, τότε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot συν(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$

Η ζητούμενη ισοδυναμία τότε γράφεται ως εξής:

$$\left||\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot συν(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\right|\le|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Longleftrightarrow |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\,\left|συν(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\right|\le|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$$

Αυτή η ανίσωση ισχύει, διότι $συν(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\le 1$

• Αν τα $\vec{\alpha}=\vec{0}$ και $\vec{\beta}=\vec{0}\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|=0$, επομένως η ζητούμενη σχέση ισχύει και μάλιστα και ως ισότητα.

ii) Θεωρούμε τα διανύσματα

$\vec{\alpha}=(3,4)$ και $\vec{\beta}=(x,y)$

Και παρατηρούμε πως

$$|3x+4y|=|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|$$

Άρα από την (i):

$$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|=\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{9}=15$$

Η ισότητα ισχύει αν ν $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

όπου α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ ή β) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

Δηλαδή, αν.ν

$$\vec{\alpha} \upuparrows \vec{b} \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

Τελικά, αν.ν

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \det|\vec{\alpha}, \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x & y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3y - 4x \Rightarrow \boxed{3y = 4x}$$

12) Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (1,2) \text{ και } \vec{\beta} = (7,4)$$

Να βρείτε:

i) $\vec{\alpha} \cdot \text{Προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{b}$

ii) Τις συντεταγμένες του $\vec{\alpha}$ $\text{Προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{b}$

Λυση

i) Γνωρίζουμε ότι

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha}\, \text{Προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{b}$ όμως $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (1,2) \cdot (7,4) = 15$

Αρα, $\vec{\alpha}\, \text{Προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{b} = 15$.

ii) Παρατηρούμε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{b} \parallel \vec{\alpha}$, $\forall \vec{\alpha} \neq \vec{0}$

Άρα,

$$\text{Προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{b} = \lambda \cdot \vec{\alpha}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή,

$$\text{Προβ}_{\alpha} \vec{b} = \lambda(1,2) = (\lambda, 2\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Αλλά, από το ερώτημα (i)

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha}\, \text{Προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = 15 \Rightarrow 1 \cdot \lambda + 2 \cdot 2\lambda = 15 \Rightarrow \lambda = 3$$

Επομένως, $\text{Προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{b} = (3, 2 \cdot 3) = (3,6)$

13) Έστω τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta} \in V$ και μη μηδενικά διανύσματα τέτοια, ώστε

$$\text{Προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \frac{1}{2}\vec{\beta}$$

<u>ΚΑΙ</u>

$$\text{Προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{3}{2}\vec{\alpha}$$

i) ΝΔΟ

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \frac{1}{2}|\vec{\beta}|^2 = \frac{3}{2}|\vec{\alpha}|^2$$

ii) ΝΔΟ

$$|\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\sqrt{3}$$

iii) Να βρεθεί η γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = ;$

<u>ΛΥΣΗ</u>

i) Ξέρουμε ότι:

$$\text{Προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \frac{1}{2}\vec{\beta}$$

Άρα,

$$\vec{\beta}\cdot\text{Προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \vec{\beta}\,\frac{1}{2}\vec{\beta} = \frac{1}{2}|\vec{\beta}|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} = \frac{1}{2}|\vec{\beta}|^2 \quad (1)$$

Ξέρουμε επίσης ότι:

$$\text{Προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{3}{2}\vec{\alpha}$$

Άρα

$$\vec{\alpha}\cdot\text{Προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,\frac{3}{2}\vec{\alpha} = \frac{3}{2}|\vec{\alpha}|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \frac{3}{2}|\vec{\alpha}|^2 \quad (2)$$

οπου (1) = (2)

ii) Δ.Ο. $\quad \frac{1}{\cancel{2}}|\vec{\beta}|^2 = \frac{3}{\cancel{2}}|\vec{\alpha}|^2 \Rightarrow |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\cdot\sqrt{3}$

iii) $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$ (3)

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \dfrac{3}{2}|\vec{\alpha}|^2$ και $|\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\sqrt{3}$

Άρα, (3)

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \cancel{\dfrac{\frac{3}{2}|\vec{\alpha}|^2}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|\sqrt{3}}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \varphi$, είναι:

$$\varphi = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

όμως αφού

$0 \leq \varphi \leq \pi$ άρα $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ rad.

14) Δίνονται τα διανύσματα

$\vec{\alpha}=(1,3)$ και $\vec{\beta}=(x,y)$ με $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

i) ΝΔΟ $x=-3y$

ii) Ν.β τα διανύσματα $\vec{u}$ όπου ισχύουν $\vec{u}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $|\vec{u}|=\sqrt{20}$

ΛΥΣΗ

i) Με $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \Rightarrow (1,3)(x,y)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x+3y=0 \Rightarrow x=-3y$

ii) $\vec{u}=\vec{\alpha}+\vec{\beta} \Rightarrow |\vec{u}|^2=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 \Rightarrow 20=|\vec{\alpha}|^2+\cancel{2\vec{\alpha}\vec{\beta}}^{0}+|\vec{\beta}|^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 20=10+|\vec{\beta}|^2 \Rightarrow |\vec{\beta}|=\sqrt{10} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2+y^2=10$
Όμως, $x=-3y$ (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (-3y)^2+y^2=10 \Rightarrow 9y^2+y^2=10 \Rightarrow \boxed{y=\pm 1}$

Άρα $\Rightarrow$ (1) είναι:

$x_1=-3(-1)=3$

ή $x_2=-3\cdot 1=-3$

Συνεπώς, $\vec{\beta_1}=(3,-1)$ ή $\vec{\beta_2}=(-3,1)$

Άρα, $\vec{u_1}=\vec{\alpha}+\vec{\beta_1}=(1,3)+(3,-1)=(4,2)$

ή

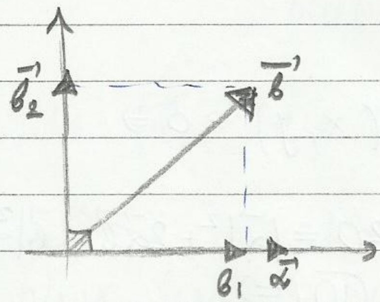
$\vec{u_2}=\vec{\alpha}+\vec{\beta_2}=(1,3)+(-3,1)=(-2,4)$.

15) Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha}=(2,-4) \quad \text{και} \quad \vec{b}=(-8,5)$$

Να αναλύσετε το $\vec{b}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες απ' τις οποίες η μια να 'ναι παράλληλη του $\vec{\alpha}$.

<u>ΛΥΣΗ</u>



Ισχύει ότι $\vec{b}=\vec{b_1}+\vec{b_2}$ (0)

$\vec{b_1}\parallel\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{b_1}=\lambda\cdot\vec{\alpha}$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}(\vec{b_1}+\vec{b_2})=\vec{\alpha}\vec{b_1}=$

$=\vec{\alpha}\cdot\lambda\vec{\alpha}=\lambda\cdot|\vec{\alpha}|^2$ (1)

όμως, $\vec{\alpha}\vec{\beta}=(2,-4)(-8,5)=-36$ (2)

Ενώ $|\vec{\alpha}|^2=4+16=20$

Άρα $\overset{(2)}{\underset{(1)}{\Rightarrow}}$ $-36=\lambda\cdot 20 \Rightarrow \lambda=-\frac{9}{5}$

$\vec{\beta_1}=-\frac{9}{5}(2,-4)=\left(-\frac{18}{5},\frac{36}{5}\right)$

(0) $\Rightarrow \vec{b_2}=\vec{b}-\vec{b_1}=(-8,5)-\left(-\frac{18}{5},\frac{36}{5}\right)=$

$=\left(-\frac{22}{5},-\frac{11}{5}\right)$.